

PROBABILITÉ

ELÉMENTS DE PROBABILITÉS DE BASE

Table des matières

1	Dénombrement	1
1.1	Ensembles finis	1
1.1.1	Cardinal d'un ensemble fini E	1
1.1.2	Propriétés des cardinaux d'ensembles finis	1
1.1.3	Nombre d'applications, d'injections et de bijections	1
1.2	Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble fini E	3
1.2.1	Définitions et propriétés	3
1.2.2	Nombre de parties de cardinal p d'un ensemble fini E de cardinal n ($p \leq n$)	4
1.2.3	Formule du binôme de Newton	4
1.3	Exercices	5
2	Calcul de probabilités	7
2.1	Notion de tribu et de mesure de probabilité	7
2.1.1	Algèbre d'ensembles	7
2.1.2	Algèbre des évènements	7
2.1.3	Mesure de probabilité	8
2.2	Probabilité sur un ensemble fini	8
2.2.1	Définition	8
2.2.2	Equiprobabilité	9
2.2.3	Propriétés	9
2.3	Probabilité conditionnelle	10
2.3.1	Définition	10
2.3.2	Probabilité composée	10
2.3.3	Evènements indépendants	10
2.3.4	Probabilité totale	10
2.3.5	Probabilité de cause ou formule de Bayes	11
2.4	Exercices	11
3	Variables aléatoires réelles	14
3.1	Variable aléatoire discrète en dimension 1	14
3.1.1	Loi de probabilité	14
3.1.2	Fonction de répartition	15
3.1.3	Moments	15
3.2	Quelques lois discrètes usuelles	16
3.2.1	Loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$	16
3.2.2	Loi de Bernoulli	17
3.2.3	Loi binomiale	17
3.2.4	Loi de Poisson	18

3.2.5	Loi de Pascal ou loi géométrique de paramètre p	19
3.2.6	Loi binomiale négative ou loi de Pascal de paramètres n et p	19
3.2.7	Loi hypergéométrique de paramètres N, n, p	20
3.3	Variable aléatoire continue en dimension 1	20
3.3.1	Rappels	20
3.3.2	Moments	21
3.3.3	Fonction d'une variable aléatoire continue	21
3.3.4	Quelques inégalités usuelles	22
3.3.5	Loi normale	22
3.3.6	Autres exemples de lois continues usuelles	24
3.4	Convergence des suites de variables aléatoires	26
3.4.1	Convergence en loi	27
3.4.2	Convergence en probabilité	27
3.4.3	Convergence presque sûre	27
3.4.4	Convergence en moyenne d'ordre r	27
3.5	Quelques approximations usuelles et leur validité	28
3.5.1	Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale . . .	28
3.5.2	Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson	28
3.5.3	Approximation de la loi binomiale par la loi normale	28
3.5.4	Approximation de la loi de Poisson par la loi normale	29
3.5.5	Utilisation du théorème central limite	29
3.6	Exercices	29
Tables statistiques		32

Chapitre 1

Dénombrément

1.1 Ensembles finis

Définition 1.1.1

Un ensemble E est dit fini s'il existe un entier naturel n tel qu'il existe une bijection entre E et l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

1.1.1 Cardinal d'un ensemble fini E

Définition 1.1.2

On appelle cardinal d'un ensemble fini E , le nombre n d'éléments dans E . On le note $\text{card}E$.

Définition 1.1.3

Deux ensembles finis E et F sont dits équipotents s'il existe une bijection de l'un dans l'autre. Donc, deux ensembles sont équipotents s'ils ont le même cardinal.

Définition 1.1.4

Le produit $n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$ des n premiers entiers naturels non nuls est appelé factorielle n et noté $n!$. Par convention, $0! = 1$.

1.1.2 Propriétés des cardinaux d'ensembles finis

Soient E et F deux ensembles finis. Alors $E \cap F$, $E \cup F$ et $E \times F$ sont finis et on a :

- i) $E \subset F \implies \text{card}E \leq \text{card}F$.
- ii) $E \cap F = \emptyset$ (i.e. E et F sont disjoints) $\implies \text{card}(E \cup F) = \text{card}E + \text{card}F$.
(Cas particulier du iii))
- iii) $\text{card}(E \cup F) = \text{card}E + \text{card}F - \text{card}(E \cap F)$.
- iv) $\text{card}(E \times F) = \text{card}E \times \text{card}F$.

Remarque : La propriété iv) sera souvent utilisée dans les problèmes d'épreuves à répétition. Elle permet d'écrire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{card}(A^n) = (\text{card}A)^n$.

1.1.3 Nombre d'applications, d'injections et de bijections

Soient E et F deux ensembles finis tels que $\text{card}E = p$ et $\text{card}F = n$ ($p, n \in \mathbb{N}$).

a) Nombre d'applications de $E \rightarrow F$

Il y a autant d'applications possibles de E dans F qu'il y a de choix possibles pour affecter à chaque élément de E une image dans F . Pour chacun des p éléments de E , il y a n choix possibles et donc on a $\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{p \text{ fois}} = n^p$ applications de E dans F .

Définition 1.1.5

Soient p et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle nombre de p -uplets (ou p -listes) à n éléments, le nombre d'applications d'un ensemble E à p éléments dans un ensemble F à n éléments. Ce nombre vaut n^p .

Exemple 1.1.1

Le nombre de nombres de 3 chiffres pouvant être formés à l'aide des chiffres 1, 2, 3, $\dots$, 9 vaut $9^3 = 729$.

b) Nombre d'applications injectives de $E \rightarrow F$ ($p \leq n$)

Lorsque f est injective, deux éléments de E ne peuvent avoir une même image. Il y a donc n images possibles pour le premier élément de E , $n - 1$ pour le deuxième, $\dots$, et $n - (p - 1)$ pour le p -ième. Ainsi, le nombre de ces injections est $n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - p + 1)$.

Définition 1.1.6 (Arrangements)

Soient p et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $p \leq n$. On appelle arrangement de p dans n et on note A_n^p , le nombre de manières d'ordonner p éléments d'un ensemble à n éléments. C'est le nombre d'injections d'un ensemble E à p éléments dans un ensemble F à n éléments.

Donc, $A_n^p = n \times (n - 1) \times \cdots \times (n - p + 1) = \frac{n!}{(n - p)!}$.

Exemple 1.1.2

Le nombre de nombres de 3 chiffres différents pouvant être formés avec les 9 chiffres de $F = \{1, 2, \dots, 9\}$ vaut $A_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$. On en déduit que le nombre de nombres de 3 chiffres formés avec les chiffres de F et ayant au moins 2 chiffres identiques vaut $9^3 - A_9^3 = 729 - 504 = 225$.

c) Nombre d'applications bijectives de E sur F ($p = n$)

D'après ce qui précède, ce nombre vaut $A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$.

Définition 1.1.7 (Nombre de permutations de E)

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Une permutation de E étant une bijection de E sur E , le nombre de permutations de E est $n!$.

1.2 Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble fini E

1.2.1 Définitions et propriétés

Remarquons d'abord que $\emptyset, E \in \mathcal{P}(E)$. Soient $A \in \mathcal{P}(E)$, $B \in \mathcal{P}(E)$; $A = \{x \in E / x \in A\}$ et $B = \{x \in E / x \in B\}$.

Définition 1.2.1 (Complémentaire d'un ensemble)

On appelle complémentaire de A dans E , le sous-ensemble $\bar{A}$ de E défini par $\bar{A} = \mathbb{C}_E^A = \{x \in E / x \notin A\}$. Si $A = \{x \in E / p(x)\}$ où p est une certaine propriété, alors $\bar{A} = \{x \in E / \text{non } p(x)\}$.

Définition 1.2.2 (Intersection de deux ensembles)

L'intersection de A et B est le sous-ensemble $A \cap B$ de E défini par $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$. Si $A = \{x \in E / p(x)\}$ et $B = \{x \in E / q(x)\}$ où p et q sont des propriétés données, alors $A \cap B = \{x \in E / p(x) \text{ et } q(x)\}$ (i.e. l'ensemble des éléments de E qui vérifient en même temps les propriétés p et q). Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont disjoints.

Définition 1.2.3 (Réunion de deux ensembles)

La réunion de A et B est le sous-ensemble $A \cup B$ de E défini par $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$. Si $A = \{x \in E / p(x)\}$ et $B = \{x \in E / q(x)\}$ où p et q sont des propriétés données, alors $A \cup B = \{x \in E / p(x) \text{ ou } q(x)\}$ (i.e. l'ensemble des éléments de E qui vérifient soit la propriété p , soit la propriété q).

Remarque : $\cap$ est distributive par rapport à $\cup$ et $\cup$ est aussi distributive par rapport à $\cap$:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{et} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Propriétés (Lois de Morgan)

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Définition 1.2.4

Différence ensembliste : $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

Différence symétrique : $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Définition 1.2.5 (Partition d'un ensemble)

Une partition de E est une partie de $\mathcal{P}(E)$ constituée de sous-ensembles non vides de E , deux à deux disjoints et dont la réunion est égale à E . Autrement dit, $(A_i)_{i=1, \dots, n}$ est une partition de E si $A_i \neq \emptyset \forall i$, $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i, j$, avec $i \neq j$ et $\bigcup_{i=1}^n A_i = E$.

Exemple 1.2.1

Soit A une partie propre de E . $\{A, \bar{A}\}$ forme une partition de E .

En effet, A et $\bar{A}$ sont non vides car A est une partie propre de E , $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = E$.

1.2.2 Nombre de parties de cardinal p d'un ensemble fini E de cardinal n ($p \leq n$)

Proposition 1.2.1

Le nombre des sous-ensembles (ou parties) comportant p éléments d'un ensemble de n éléments est $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. Ce nombre est aussi parfois noté $\binom{n}{p}$.

Propriétés des C_n^p

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$ on a : $C_n^p = C_n^{n-p}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall p \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq p \leq n-1$ on a : $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$.

1.2.3 Formule du binôme de Newton

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* : (a+b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^p b^{n-p}.$$

Application : Montrer que :

- (i) $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n$.
- (ii) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0$.

Réponse: Il suffit de faire $a = b = 1$ dans la formule du binôme de Newton pour obtenir le (i) et de faire $a = -1$ et $b = 1$ pour obtenir le (ii).

Triangle de Pascal : En utilisant les relations $C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^n = 1$ et $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$, on peut tracer un tableau triangulaire composé de lignes numérotées $0, 1, 2, \dots, n$ et de colonnes numérotées $0, 1, 2, \dots, p$ de telle façon que les C_n^p figure dans la case intersection de la ligne n et de la colonne p . Le triangle de Pascal permet d'obtenir rapidement les coefficients de la forme C_n^p d'un développement binomial. On lit facilement :

- sur la 1^{ère} ligne, les coefficients numériques du développement de $(a+b)^0$
- sur la 2^{ème} ligne, les coefficients numériques du développement de $(a+b)^1$: ::::
- sur la 7^{ème} ligne, les coefficients numériques du développement de $(a+b)^6$
- et ainsi de suite.

Triangle de Pascal :

En utilisant les relations $C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^n = 1$ et $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$, on peut tracer un tableau triangulaire composé de lignes numérotées $0, 1, 2, \dots, n$ et de colonnes numérotées $0, 1, 2, \dots, p$ de telle façon que les C_n^p figure dans la case intersection de la ligne n et de la colonne p . Le triangle de Pascal permet d'obtenir rapidement les coefficients de la forme C_n^p d'un développement binomial. On lit facilement :

- sur la première ligne, les coefficients numériques du développement de $(a+b)^0$
- sur la deuxième ligne, les coefficients numériques du développement de $(a+b)^1$
- sur la septième ligne, les coefficients numériques du développement de $(a+b)^6$

- et ainsi de suite.

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
$\vdots$									

Proposition 1.2.2

Soit $\mathbf{E}$ un ensemble fini à n éléments (e.g. $\mathbf{E}$ est une population de n individus) et $\mathcal{P}(\mathbf{E})$ l'ensemble des parties de $\mathbf{E}$. Alors $\text{card}\mathcal{P}(\mathbf{E}) = 2^n$. En effet, on trouve le cardinal de $\mathcal{P}(\mathbf{E})$ en écrivant

$$\text{Card}\mathcal{P}(\mathbf{E}) = \text{Card}\left\{\bigcup_{p=0}^n \mathbf{E}_p\right\} = \sum_{p=0}^n \text{Card}\mathbf{E}_p = \sum_{p=0}^n C_n^p = 2^n$$

où $\mathbf{E}_p$, $p = 0, 1, 2, \dots, n$ désigne une partie à p éléments distincts de $\mathbf{E}$.

Proposition 1.2.3

1. Le nombre de parties à p éléments avec répétitions possible d'un ensemble $\mathbf{E}$ à n éléments est égal $\Gamma_n^p = C_{n+p-1}^p$.
2. Le nombre de suites de n entiers naturels dont la somme est p est aussi égal à $\Gamma_n^p = C_{n+p-1}^p$. c-à-dire

$$\text{card}\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n | x_1 + x_2 + \dots + x_n = p\} = \Gamma_n^p.$$

Preuve

Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une combinaison avec répétition de p éléments de $\mathbf{E}$. Représentons le terme x_i par 0 autant de fois qu'il se répète puis par 1, lorsque i parcourt les entiers 1 à n en convenant de ne pas mettre le dernier 1. Alors Γ_n^p est le nombre de façons de choisir $n-1$ places de "1" parmi les $n+p-1$ places total de 0 et de 1, soit $\Gamma_n^p = C_{n+p-1}^{n-1} = C_{n+p-1}^p$.

Remarque 1.2.1

Une telle partie est aussi appelée une combinaison à p éléments avec répétition. Elle est de la forme $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ avec $x_i \in \mathbf{E} \forall i$ et telle que les x_i , $i = 1, 2, \dots, p$ ne soient pas nécessairement distincts.

1.3 Exercices

Exercice 1.1

On dispose de 4 boules de couleurs différentes notées R, B, J, V. On a la possibilité soit de ne choisir de boules, soit d'en choisir une, deux, trois ou quatre. Combien peut-on effectuer de choix possibles ?

Exercice 1.2

- a) On dispose de trois tiroirs notés A, B, C dans lesquels on doit ranger à sa guise 7 objets discernables numérotés 1 à 7. Combien de rangements différents peut-on réaliser ? On pourra faire un arbre.
- b) On dispose cette fois-ci de 3 objets discernables notés 1, 2, 3 et de 5 tiroirs notés A, B, C, D, E mais l'on ne veut ranger deux objets dans un même tiroir. Combien de rangements différents peut-on en faire ?

Exercice 1.3

On veut fabriquer des mots de trois lettres (ayant ou non un sens) avec les lettres de l'alphabet. Déterminer les nombres :

1. N_1 de mots différents que l'on peut fabriquer
2. N_2 de mots contenant trois lettres distinctes
3. N_3 de mots commençant et finissant par une consonne
4. N_4 de mots contenant au moins une voyelle
5. N_5 de mots contenant exactement deux consonnes et une voyelle.

Exercice 1.4

1. On dispose de n boules d'une même couleur indiscernables au toucher. Montrer que le nombre de façons de les répartir en trois groupes de n_1 , n_2 et n_3 boules respectivement telle que $n_1 + n_2 + n_3 = n$ est

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}.$$

2. Dans un commissariat, huit (08) agents de police sont répartis aléatoirement de telle sorte qu'il y ait 3 agents de patrouille, 2 agents de garde au commissariat et 3 agents de réserve. Quel est le nombre total de répartitions possibles ?

Exercice 1.5

On rappelle que dans un jeu de cartes, chacune des cartes peut être considérée comme un élément du produit $E \times F$ où E est l'ensemble des 4 couleurs : cœur, carreau, trèfle, pique et F est l'ensemble des valeurs $2, 3, \dots, 10$, Valet, Dame, Roi et As. Un jeu de Bridge est composé de 52 cartes et un jeu de Belote de 32 cartes. On considère un jeu de Belote. On appelle main, tout ensemble de 5 cartes.

- 1) Combien y a-t-il de mains possibles ?
- 2) Combien y a-t-il de mains contenant le valet de trèfle ?
- 3) Combien y a-t-il de mains contenant exactement un As ?
- 4) Combien y a-t-il de mains contenant au moins un Roi ?

Exercice 1.6

Déterminer le nombre de numéros de téléphone à 7 chiffres tels que :

- 1) le numéro est formé de deux 1, deux 3 et trois 7 ;
- 2) le numéro est formé de deux chiffres distincts et deux seulement ;
- 3) le numéro est formé de trois 1 et trois seulement ;
- 4) la somme des chiffres du numéro est égale à 10.

Exercice 1.7

Soient n et p deux entiers naturels avec $n \geq p$. Démontrer que

$$\sum_{k=p}^n C_k^p = C_{n+1}^{p+1}$$

Chapitre 2

Calcul de probabilités

2.1 Notion de tribu et de mesure de probabilité

2.1.1 Algèbre d'ensembles

Soit $\mathcal{A}$ une famille non vide de sous-ensembles de Ω . $\mathcal{A}$ est une algèbre d'ensembles si $\mathcal{A}$ est stable pour les opérations de complémentarité et de réunion finie, c'est-à-dire si :

- i) $\forall A \in \mathcal{A}, \bar{A} \in \mathcal{A}$;
- ii) $\forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{A}, A \cup B \in \mathcal{A}$.

Conséquence : Si $\mathcal{A}$ est une algèbre d'ensembles alors :

- i) $\Omega \in \mathcal{A}$ et $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- ii) $\forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{A}, A \cap B \in \mathcal{A}$.

2.1.2 Algèbre des évènements

a) Epreuve

- On entend par épreuve, une expérience dont l'issue est incertaine.
- Soit Ω l'ensemble des cas possibles observables à l'issue d'une épreuve aléatoire. Un évènement lié à cette épreuve peut être représenté par un sous-ensemble de Ω . Ω est appelé ensemble fondamental (c'est l'univers).
- Un évènement élémentaire est un évènement qui ne sera réalisé que par un seul résultat de l'épreuve aléatoire.
- Ω est l'évènement certain car il se réalise toujours.
- $\emptyset$ est l'évènement impossible car il ne se réalise jamais.

b) Algèbre d'évènements

Une famille $\mathcal{A}$, non vide, d'évènements de Ω est une algèbre d'évènements si :

- i) $\forall A \in \mathcal{A}, \bar{A} \in \mathcal{A}$;
- ii) $\forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{A}, A \cup B \in \mathcal{A}$.

c) Tribu

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre d'évènements de Ω (l'ensemble fondamental est infini). $\mathcal{A}$ est une tribu si pour toute suite infinie dénombrable $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ d'éléments de $\mathcal{A}$

on a $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Conséquence : $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

2.1.3 Mesure de probabilité

a) Espace probabilisable

On appelle espace probabilisable un couple $(\Omega, \mathcal{A})$ constitué d'un ensemble Ω et d'une tribu d'évènements $\mathcal{A}$ de parties de Ω .

b) Evènements incompatibles

Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et A et B deux évènements de $\mathcal{A}$. On dit que A et B sont incompatibles si A et B ne peuvent se réaliser en même temps.

c) Système complet d'évènements

On appelle système complet d'évènements de l'espace $(\Omega, \mathcal{A})$, tout sous-ensemble fini ou dénombrable de $\mathcal{A}$, formant une partition de Ω . $\{C_i / C_i \in \mathcal{A}, i \in I\}$ est un système complet d'évènements si, et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in I, C_i \neq \emptyset \\ \forall i \in I, \forall j \in I, i \neq j \Rightarrow C_i \cap C_j = \emptyset \\ \bigcup_{i \in I} C_i = \Omega \end{array} \right.$$

d) Espace probabilisé

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Une probabilité est une application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

ii) $\forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{A}$ tels que $A \cap B = \emptyset$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ et si $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ est une suite dénombrable d'évènements deux à deux incompatibles, alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

On appelle espace probabilisé ou espace de probabilité le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

2.2 Probabilité sur un ensemble fini

2.2.1 Définition

Soit Ω un ensemble fini : $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Dans ce cas, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, et $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un espace probabilisable sur lequel on définit une probabilité $\mathbb{P}$ telle que

$p_i = \mathbb{P}(\{a_i\})$ avec $p_i \in [0, 1]$ et $\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

2.2.2 Equiprobabilité

Soit $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ tel que $\text{card}(\Omega) = n \in \mathbb{N}^*$. L'application

$$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$$

$$\{a_i\} \mapsto \frac{1}{n}$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Étant donné que pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, $\mathbb{P}(\{a_i\}) = \frac{1}{n}$, on parle d'équiprobabilité sur Ω .

De façon générale on a : $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$.

Exemple 2.2.1

Considérons l'univers Ω constitué d'un jeu de 32 cartes. Il comporte 8 hauteurs (7, 8, 9, 10, J, Q, K, A). Dans chaque hauteur, il y a 4 couleurs : pique, coeur, carreau et trèfle. On tire une carte du lot. Soient A l'évènement : « Tirer la hauteur 7 » et B l'évènement : « Tirer la couleur pique ».

$$\text{On a : } \mathbb{P}(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \text{ et } \mathbb{P}(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$$

2.2.3 Propriétés

- i) $\forall A \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- ii) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- iii) $\forall A \in \mathcal{A}, 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.
- iv) $\forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- v) Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des éléments de $\mathcal{A}$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i < j}^n \mathbb{P}(A_i \cap A_j) \\ &\quad + \sum_{i < j < k}^n \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_i \leq n} (-1)^{i+1} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \dots \cap A_{k_i}). \end{aligned}$$

Cas particulier : Si $\{C_i / C_i \in \mathcal{A}, i \in I\}$ est un système complet d'évènements,

$$\text{on a : } \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} C_i\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(C_i) = 1.$$

2.3 Probabilité conditionnelle

2.3.1 Définition

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(A) > 0$. L'application $\mathbb{P}_A$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall B \in \mathcal{A}, \mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

est une probabilité. C'est une probabilité conditionnelle.

Exemple 2.3.1

Soit un jeu de 52 cartes. Les cartes ont été regroupées selon leurs couleurs. On extrait une carte au hasard. Quelle est la probabilité d'extraire la hauteur « Roi » sachant que l'on a puisé dans le paquet des « Coeur » ?

$$\text{On a } \mathbb{P}(\text{Coeur}) = \frac{13}{52} \text{ et } \mathbb{P}(\text{Roi} \cap \text{Coeur}) = \frac{1}{52}, \text{ donc } \mathbb{P}_{\text{Coeur}}(\text{Roi}) = \frac{1}{13}.$$

Notation : $\forall B \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}_A(B)$ sera notée $\mathbb{P}(B / A)$ et elle se lit « probabilité de B sachant A ». Toutefois, B / A n'est pas un évènement.

2.3.2 Probabilité composée

$\forall A \in \mathcal{A}$, $\forall B \in \mathcal{A}$ tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$ on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B / A) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A / B).$$

$\forall A \in \mathcal{A}$, $\forall B \in \mathcal{A}$ tels que $B \subset A$, $\mathbb{P}(A / B) = 1$.

2.3.3 Evènements indépendants

Définition 2.3.1

Deux évènements A et B sont indépendants pour $\mathbb{P}$ si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Propriétés

Si A et B sont indépendants, alors :

- i) $\mathbb{P}(A / B) = \mathbb{P}(A)$ si $\mathbb{P}(B) > 0$ et $\mathbb{P}(B / A) = \mathbb{P}(B)$ si $\mathbb{P}(A) > 0$.
- ii) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) \times \mathbb{P}(B)$.
- iii) $\bar{A}$ et B sont indépendants.
- iv) A et $\bar{B}$ sont indépendants.
- v) $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

2.3.4 Probabilité totale

Théorème 2.3.1

Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ un système complet d'évènements. Alors, pour tout évènement B , on a

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(B / A_n) \mathbb{P}(A_n).$$

2.3.5 Probabilité de cause ou formule de Bayes

Théorème 2.3.2

Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ un système complet d'événements. Alors, pour tout événement B tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, on a

$$\mathbb{P}(A_0 / B) = \frac{\mathbb{P}(B / A_0)\mathbb{P}(A_0)}{\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(B / A_n)\mathbb{P}(A_n)}.$$

2.4 Exercices

Exercice 2.1

Un étudiant s'habille très vite le matin et prend, au hasard dans la pile d'habits, un pantalon, un T-shirt, une paire de chaussettes ; il y a ce jour-là dans l'armoire **5** pantalons dont **2** noirs, **6** T-shirt dont **4** noirs, **8** paires de chaussettes, dont **5** paires noires. Combien y-a-t-il de façons de s'habiller ? Quelles sont les probabilités des événements suivants : il est tout en noir ? une seule pièce est noire sur les trois.

Exercice 2.2

Quelle est la probabilité pour que, dans une famille de huit enfants, il y ait

1. Exactement 5 filles ;
2. Au moins 5 filles.

NB : Donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Exercice 2.3

Dans un jeu de **52** cartes, on prend une carte au hasard : les événements « tirer un roi » et « tirer un pique » sont-ils indépendants ? Quelle est la probabilité de « tirer un roi ou un pique » ?

Exercice 2.4

On considère deux sacs A et B extérieurement identiques contenant des boules indiscernables au touché. Le sac A contient **16** boules blanches et **6** boules noires ; le sac B contient **7** boules blanches et **14** boules noires. D'un des deux sacs, choisi au hasard, on extrait **2** boules choisies au hasard et l'on obtient deux boules blanches. Quelle est la probabilité pour que les **2** boules aient été extraites de A ? Quelle est la probabilité pour que les **2** boules aient été extraites de B ?

Exercice 2.5

Dans un lot de pièces métalliques rectangulaires destinées à un assemblage, on sait que :

3% ont une longueur qui, s'écartant trop des normes, les rend inutilisables.

5% ont une largeur les rendant inutilisables.

2% s'écartent trop de la norme, à la fois par leur longueur et par leur largeur.

On prend une pièce au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit utilisable ?

Exercice 2.6

On dispose de 10 livres (deux livres de chimie, trois livres de physique et cinq livres de mathématiques) qu'on range au hasard sur un étagère. Quelle est la probabilité

- 1) p_1 pour que 3 livres donnés soient rangés côte à côte ?
- 2) p_2 que les livres soient bien rangés (les livres sont rangés par discipline) ?

Exercice 2.7

On compose au hasard un numéro de téléphone à 8 chiffres. Quelle est la probabilité pour que :

- 1) tous les chiffres du numéro soient distincts ?
- 2) le produit des chiffres soit divisible par 2 ?
- 3) les chiffres forment une suite strictement croissante ?
- 4) les chiffres forment une suite croissante au sens large ?

Exercice 2.8

Pour se rendre à l'université, un étudiant a le choix entre 4 itinéraires : A, B, C et D. La probabilité qu'il a de choisir l'itinéraire A (resp. B, C) est $\frac{1}{3}$ (resp. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$). La probabilité d'arriver en retard en empruntant A (resp. B, C) est $\frac{1}{20}$ (resp. $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$). En empruntant D, il n'est jamais en retard. Calculer la probabilité pour que :

- 1) l'étudiant choisisse l'itinéraire D ?
- 2) l'étudiant arrive en retard ?
- 3) l'étudiant ait emprunté l'itinéraire C sachant qu'il est arrivé en retard ?

Un certain système a 5 composantes. Une panne du système est causée 35%, 30%, 20%, 10% et 5% des fois par une panne dans les composantes **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, respectivement. On suppose que les pannes simultanées dans plus d'une composante à la fois sont si rares qu'on peut les négliger.

1. Si une panne du système n'est pas causée par **A**, quelle est la probabilité qu'elle soit causée par **B** ?
2. Si une panne du système n'est causée ni par **A**, ni par **B**, quelle est la probabilité qu'elle soit causée par **C** ou **D** ?

Exercice 2.9

Parmi les vols quittant une ville V_1 pour une ville V_2 , 89.5% partent à l'heure (événement **D**) et arrivent à destination à l'heure (événement **A**), 3.5% partent à l'heure et arrivent en retard, 1.5% partent en retard et arrivent à l'heure, et 5.5% partent en retard et arrivent en retard.

- 1) Traduire les données de l'énoncé et expliquer pourquoi elles sont cohérentes.
- 2) Quelle est la probabilité
 - (a) qu'un vol parte à l'heure ?
 - (b) qu'un vol arrive en retard ?
 - (c) qu'un vol arrive à l'heure sachant qu'il est parti à l'heure ?
 - (d) qu'un vol arrivé en retard soit parti en retard ?

Exercice 2.10

La proportion des pièces défectueuses dans un lot est de 0.05. Le contrôle de fabrication des pièces est tel que :

- Si la pièce est bonne, elle est acceptée avec une probabilité de 0.96.
- Si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec probabilité 0.98.

On choisit une pièce au hasard et la contrôle. Probabilité pour :

- 1) qu'il y ait une erreur de contrôle ?
- 2) qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?

Exercice 2.11

On suppose que l'année compte n jours. Quelle est la probabilité pour que dans une classe de k étudiants ($k \leq n$), au moins deux étudiants aient leur jour d'anniversaire en commun ? Faire l'application numérique pour $n = 365$ et $k = 19$.

Exercice 2.12

Un distributeur de prospectus (tous distincts) fait son travail de façon distraite et a distribué au hasard n prospectus dans p boîtes à lettres d'une cité universitaire supposées numérotées de 1 à p . Quelle est la probabilité :

- 1) p_1 pour que dans les boîtes il y ait respectivement $r_1, \dots, r_p$ prospectus avec $r_1 + \dots + r_p = n$?
- 2) p_2 pour qu'aucune boîte ne soit vide ?

Exercice 2.13

Trois personnes vont au cinéma. Il passe trois films différents. Chaque personne choisit son film au hasard sans tenir compte du choix des autres. Quelle est la probabilité que :

- 1) les trois personnes aient vu les trois films différents ?
- 2) les trois personnes aient vu le même film ?
- 3) deux personnes exactement aient vu le même film ?
- 4) au moins deux personnes aient vu le même film ?

Chapitre 3

Variables aléatoires réelles

3.1 Variable aléatoire discrète en dimension 1

Définition 3.1.1

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une variable aléatoire réelle est une application $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega \mapsto x$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbf{X}^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A} \text{ où } \mathbf{X}^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega / \mathbf{X}(\omega) = x\}.$$

Si l'ensemble $\mathbf{X}(\Omega)$ des valeurs possibles prises par la variable aléatoire $\mathbf{X}$ est au plus dénombrable, alors on dit que $\mathbf{X}$ est une variable aléatoire discrète. Sinon, on parle d'une variable aléatoire continue.

Exemple 3.1.1

On lance trois fois une pièce de monnaie (qui prend deux valeurs possibles « Pile » ou « Face »). L'univers est $\Omega = \{\mathbf{P}, \mathbf{F}\}$. Notons $\mathbf{X}$ le nombre de fois que « Face » apparaît au bout des trois lancers. Les valeurs possibles de $\mathbf{X}$ sont dans l'ensemble $\mathbf{X}(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. $\mathbf{X}$ est une application de Ω dans $\mathbf{X}(\Omega)$.

3.1.1 Loi de probabilité

On peut probabiliser $(\Omega, \mathcal{P}(\mathbf{X}(\Omega)))$ par l'application $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$ définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathbf{X}} : \mathcal{P}(\mathbf{X}(\Omega)) &\rightarrow [0, 1] \\ \mathbf{A} &\mapsto \mathbb{P}_{\mathbf{X}}(\mathbf{A}) = \mathbb{P}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{A})). \end{aligned}$$

Si $\mathbf{X}(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$, avec I un ensemble fini ou dénombrable, alors $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$ est entièrement déterminée par la donnée des nombres p_i définis par : $p_i = \mathbb{P}_{\mathbf{X}}(\{x_i\}) = \mathbb{P}(\mathbf{X} = x_i) \quad \forall i \in I$.

La loi de probabilité de $\mathbf{X}$ est bien définie si, et seulement si :

- $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $p_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ lorsque $\mathbf{X}(\Omega)$ est fini.
- $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $p_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ lorsque $\mathbf{X}(\Omega)$ est dénombrable.

3.1.2 Fonction de répartition

La fonction de répartition $\mathbf{F}$ d'une variable aléatoire $\mathbf{X}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ comme suit :

$$\mathbf{F} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto \mathbf{F}(x) = \mathbb{P}(\mathbf{X} \leq x) \text{ où } (\mathbf{X} \leq x) = \{\omega \in \Omega / \mathbf{X}(\omega) \leq x\}.$$

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète finie telle que $\text{card}(\mathbf{X}(\Omega)) = n$, la fonction de répartition se définit de la façon suivante :

$$\mathbf{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ p_1 & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^j p_i & \text{si } x_j \leq x < x_{j+1} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \text{si } x \geq x_n \end{cases}$$

La fonction de répartition $\mathbf{F}$ permet de déterminer la loi de probabilité de $\mathbf{X}$. En effet,

$$\begin{aligned} \forall x_j \in \mathbf{X}(\Omega), \mathbb{P}(\mathbf{X} = x_j) &= p_j \\ &= \sum_{i=1}^j p_i - \sum_{i=1}^{j-1} p_i \\ &= \mathbb{P}(\mathbf{X} \leq x_j) - \mathbb{P}(\mathbf{X} \leq x_{j-1}) \\ &= \mathbf{F}(x_j) - \mathbf{F}(x_{j-1}). \end{aligned}$$

a) Propriétés

- i) $\forall x, y \in \mathbb{R} / x \leq y, \mathbf{F}(x) \leq \mathbf{F}(y).$
- ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{F}(x) = 1.$
- iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{F}(x) = 0.$
- iv) $\mathbf{F}$ est une fonction continue à gauche.

3.1.3 Moments

a) Moments d'ordre k

On appelle moment d'ordre k d'une variable aléatoire $\mathbf{X}$, le réel $m_k(\mathbf{X})$ défini par :

$$m_k(\mathbf{X}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n p_i x_i^k & \text{si } \mathbf{X}(\Omega) \text{ est fini} \\ \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i^k & \text{si } \mathbf{X}(\Omega) \text{ est dénombrable et la série converge absolument.} \end{cases}$$

b) Espérance mathématique

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire $\mathbf{X}$ est égale au moment d'ordre 1 de $\mathbf{X}$, s'il existe. Elle se note $\mathbb{E}(\mathbf{X})$.

$$\mathbb{E}(\mathbf{X}) = m_1(\mathbf{X}) = \sum_i p_i x_i.$$

c) Moment centré d'ordre k

On appelle variable aléatoire centrée d'une variable aléatoire $\mathbf{X}$, la variable aléatoire $\mathbf{Y}$ définie par : $\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} - m_1(\mathbf{X})$.

On appelle moment centré d'ordre k de la variable aléatoire $\mathbf{X}$, le réel $\mu_k(\mathbf{X})$ défini par :

$$\mu_k(\mathbf{X}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \mathbb{E}(\mathbf{X}))^k & \text{si } \mathbf{X}(\Omega) \text{ est fini} \\ \sum_{i=1}^{\infty} p_i (x_i - \mathbb{E}(\mathbf{X}))^k & \text{si } \mathbf{X}(\Omega) \text{ est dénombrable et la série converge absolument.} \end{cases}$$

d) Variance et écart-type

La variance $\text{Var}(\mathbf{X})$ d'une variable aléatoire $\mathbf{X}$ est son moment centré d'ordre 2 :

$$\text{Var}(\mathbf{X}) = \mu_2(\mathbf{X}).$$

L'écart-type de $\mathbf{X}$ est la racine carrée de sa variance. On le note $\sigma(\mathbf{X})$.

$$\sigma(\mathbf{X}) = \sqrt{\text{Var}(\mathbf{X})}.$$

Propriété

$$\text{Var}(\mathbf{X}) = m_2(\mathbf{X}) - (m_1(\mathbf{X}))^2.$$

3.2 Quelques lois discrètes usuelles**3.2.1 Loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$**

Elle modélise des situations d'équiprobabilité.

Définition 3.2.1

On dit qu'une variable aléatoire $\mathbf{X}$ suit une loi uniforme discrète lorsqu'elle prend ses valeurs dans $1, \dots, n$ avec des probabilités élémentaires identiques. Puisque la somme de ces dernières doit valoir 1, on en déduit qu'elles doivent toutes être égales à $\frac{1}{n}$:

$\forall k = 1, 2, \dots, n, \mathbb{P}(\mathbf{X} = k) = \frac{1}{n}$. On note également ces probabilités p_k , $\mathbb{P}(k)$ ou $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(k)$. Ces probabilités élémentaires sont en particulier indépendantes de la modalité k .

Propriété 3.2.1

L'espérance et la variance sont respectivement données par : $\mathbb{E}(\mathbf{X}) = \frac{n+1}{2}$ et $\text{Var}(\mathbf{X}) = \frac{n^2 - 1}{12}$.

Exercice 3.1

Démontrer la propriété précédente.

3.2.2 Loi de Bernoulli**Définition 3.2.2**

Cette loi est celle de toute variable aléatoire $\mathbf{X}$ modélisant une expérience dont l'issue ne possède que deux alternatives de type "succès ou échec", "vrai ou faux", "marche ou arrêt", "pile ou face", etc. Un succès est représenté par l'évènement $\{\mathbf{X} = 1\}$ tandis que $\{\mathbf{X} = 0\}$ correspond à un échec. $\mathbf{X}(\Omega) = \{0; 1\}$. Puisque l'on a $\mathbb{P}(\mathbf{X} = 0) = 1 - \mathbb{P}(\mathbf{X} = 1)$, la loi de $\mathbf{X}$ ne dépend que d'un paramètre (la probabilité de succès); on parle alors de la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}$ caractérisée par $\mathbb{P}(\mathbf{X} = 1) = p$ et $\mathbb{P}(\mathbf{X} = 0) = 1 - p$.

Propriété 3.2.2

L'espérance et la variance sont respectivement données par : $\mathbb{E}(\mathbf{X}) = p$ et $\text{Var}(\mathbf{X}) = p(1 - p)$.

3.2.3 Loi binomiale**Définition 3.2.3**

La loi binomiale est la loi de probabilité d'une variable aléatoire représentant une série d'épreuves de Bernoulli possédant les propriétés suivantes :

1. Chaque épreuve donne lieu à deux éventualités exclusives de probabilités constantes p et $q = 1 - p$.
2. Les épreuves répétées sont indépendantes les unes des autres.
3. La variable aléatoire $\mathbf{X}$ correspondante prend pour valeur le nombre de succès dans une suite de n épreuves.

Deux paramètres, le nombre d'épreuves (identiques mais indépendantes) répétées n et la probabilité p de succès dans l'épreuve de Bernoulli en question caractérisent cette loi. Lors d'une telle expérience, on dit que $\mathbf{X}$ suit une loi binomiale $B(n, p)$, à valeurs dans $\mathbf{X}(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$.

Exemple 3.2.1

Le nombre $\mathbf{X}$ de "Pile" obtenus au cours de n lancers indépendants d'une pièce de monnaie équilibrée est une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\{0, 1\}$ et suivant une loi binomiale $B(n, p)$ avec $p = \frac{1}{2}$, puisque la probabilité de succès est celle d'obtenir un pile, i.e. $\frac{1}{2}$.

Théorème 3.2.1

On a $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \dots + \mathbf{X}_n$ où les $\mathbf{X}_k$ sont des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p , correspondant au succès d'une seule épreuve de pile ou face.

Exemple 3.2.2

Le nombre de boules rouges extraites au cours de n tirages successifs avec remise (pour assurer l'indépendance) d'une boule dans une urne contenant des boules rouges et blanches dans des proportions p et $q = 1 - p$ est une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(n, p)$.

Pour déterminer les probabilités des évènements élémentaires d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale, il nous faut tout d'abord déterminer le nombre de possibilités d'obtenir k succès au cours de n épreuves. Il s'agit de déterminer le nombre de combinaisons (non ordonnées) de k objets pris parmi n , avec bien sûr $k \leq n$. Les combinaisons sont non ordonnées car seul importe d'avoir k objets (succès pour nous) et non pas à quel(s) tirage(s) ces succès ont eu lieu. Puisqu'on connaît le nombre de possibilités de k succès et $n - k$ échecs, (C_n^k) , il suffit de les multiplier par les probabilités de succès et d'échec pour obtenir la loi binomiale. On a donc :

Propriété 3.2.3

Les probabilités élémentaires d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $B(n, p)$ sont données pour tout nombre de succès $k = 0, 1, 2, \dots, n$ par :

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Propriété 3.2.4

L'espérance et la variance sont respectivement données par $\mathbb{E}(X) = np$ et $\text{Var}(X) = np(1 - p)$.

Exercice 3.2

Démontrer la propriété précédente.

Exemple 3.2.3

Un atelier comporte 10 machines identiques. Chaque machine a une probabilité $p = 0.01$ de tomber en panne à un moment dans la journée. Lorsque l'on suppose que les machines tombent en panne de manière indépendantes, la variable aléatoire X désignant le nombre de machines en panne à un moment donné dans la journée suit une loi $B(10, 0.01)$. Le nombre moyen de pannes par jour est donc $\mathbb{E}(X) = 10 \times 0.01 = 0.1$, la variance étant $\text{Var}(X) = 10 \times 0.01 \times 0.99 = 0.099$.

Exemple 3.2.4

Une machine qui a une probabilité $p = 0.01$ de tomber en panne dans la journée est amenée à fonctionner pendant 20 jours consécutifs. Alors, en supposant l'indépendance des pannes, i.e. si l'on considère qu'après chaque panne la machine est restaurée à l'identique, X suit une loi $B(20, 0.01)$.

3.2.4 Loi de Poisson

Lorsque le nombre d'épreuves n devient très important, la manipulation de la loi binomiale devient elle très fastidieuse et est parfois remplacée en première approximation par son homologue asymptotique, la loi de Poisson. Celle-ci évalue le nombre aléatoire d'évènements de même probabilité pendant une durée donnée. Elle peut modéliser par exemple le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique, le nombre de voyageurs se présentant à un guichet dans la journée, etc. Pour des raisons tues ici, elle s'exprime à l'aide de la fonction exponentielle et dépend d'un paramètre $\lambda > 0$, qui correspond au nombre moyen d'occurrence du phénomène observé pendant la durée donnée. Plus formellement :

Définition 3.2.4

Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{P}(\lambda)$ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Propriété 3.2.5

On a

$$\mathbb{P}(X = k + 1) = \frac{\lambda}{k + 1} p(X = k),$$

et

$$\mathbb{E}(X) = \text{Var}(X) = \lambda.$$

Remarque 3.2.1

Dans la pratique, des tables donnant les probabilités élémentaires pour différentes valeurs du paramètre sont disponibles et utilisées.

Propriété 3.2.6

Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$, alors $X = X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Exercice 3.3

Démontrer la propriété précédente.

3.2.5 Loi de Pascal ou loi géométrique de paramètre p

Une variable aléatoire X suit la loi de Pascal ou loi géométrique de paramètre p , $\mathcal{G}(p)$, si $X \in \mathbb{N}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}[X = k] = p(1 - p)^{k-1}.$$

La v.a. X décrit le nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir exactement un succès dans un jeu de pile ou face par exemple. On vérifie que $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ et $\text{Var}(X) = \frac{1 - p}{p^2}$.

3.2.6 Loi binomiale négative ou loi de Pascal de paramètres n et p

Une variable aléatoire X suit la loi binomiale négative ou loi de Pascal de paramètres n et p , $\mathcal{BN}(n, p)$, si $X \in \{n, n + 1, \dots\}$ et

$$\forall k = n, n + 1, \dots, \mathbb{P}[X = k] = C_{k-1}^{n-1} p^n (1 - p)^{k-n}.$$

Ceci est équivalent à $X \in \{0, 1, \dots\}$ et

$$\forall k \geq 0, \mathbb{P}[X = k] = C_{n+k-1}^{n-1} p^n (1 - p)^k.$$

Remarquons que $X = n + k$, $k = 0, 1, \dots$, si et seulement si on a effectué $n + k$ épreuves, le $(n + k)^{\text{ième}}$ essai est un succès de probabilité p et dans les $n + k - 1$ premiers essais, on a obtenu $n - 1$ succès et k échecs. On peut aussi écrire $X = X_1 + X_2 + \dots + X_k$ avec les X_i indépendantes de loi $\mathcal{G}(p)$. On vérifie que $\mathbb{E}(X) = \frac{n}{p}$

et $\text{Var}(X) = \frac{n(1 - p)}{p^2}$.

3.2.7 Loi hypergéométrique de paramètres N, n, p

Une variable aléatoire X suit la loi hypergéométrique de paramètres N, n, p , $\mathcal{H}(N, n, p)$, si $X \in \{0, 1, \dots, n\}$ avec $n \leq N$ et

$$\forall k = 0, 1, \dots, n, \quad \mathbb{P}[X = k] = \frac{C_{Np}^k C_{N-Np}^{n-k}}{C_N^n}, \text{ telle que } k \leq Np.$$

Ici N représente par exemple la taille d'une population dans laquelle on s'intéresse à des individus d'un type donné supposés être en proportion $p = \frac{Np}{N}$ et X est le nombre d'individus de ce type présents dans un échantillon de taille n obtenu par tirage successif sans remise. On vérifie que $\mathbb{E}(X) = np$ et $\text{Var}(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$.

3.3 Variable aléatoire continue en dimension 1

3.3.1 Rappels

a) Intégrales généralisées

Soient a et b deux réels. Par définition,

$$\int_{-\infty}^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^c f(t)dt + \int_c^{+\infty} f(t)dt \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

On parle d'intégrale convergente si la limite existe et est finie. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

b) Variable aléatoire continue

Soient X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ et F sa fonction de répartition :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto F(x) = \mathbb{P}(X \leq x). \end{aligned}$$

On dit que X est une variable aléatoire continue s'il existe une fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

- i) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.
- ii) f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être aux points pour lesquels elle admet une limite finie à gauche et à droite.
- iii) $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est bien définie et est égale à 1.

Dans ces conditions, f est alors une densité de probabilité de la variable aléatoire X .

Remarque : Une variable aléatoire continue est également définie par la connaissance d'une fonction F de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ vérifiant les propriétés suivantes :

- i) $\mathbf{F}$ est continue et croissante (au sens large) dans $\mathbb{R}$.
- ii) $\lim_{-\infty} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ et $\lim_{+\infty} \mathbf{F} = \mathbf{1}$.
- iii) $\mathbf{F}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (sauf peut-être sur un ensemble $\mathbf{I}$ fini ou dénombrable de points pour lesquels elle est dérivable à gauche et à droite) et $\mathbf{F}'$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbf{I}$. On a alors « presque partout » $\mathbf{f} = \mathbf{F}'$.

Exemple 3.3.1

Soit $\mathbf{f}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ avec $\lambda > 0$. Montrer que $\mathbf{f}$ est bien une fonction de densité.

3.3.2 Moments

Soit $\mathbf{X}$ une variable aléatoire continue de densité $\mathbf{f}$. On définit, en supposant la convergence des intégrales, les notions suivantes :

a) Les moments d'ordre k ($k \in \mathbb{N}$)

$$m_k(\mathbf{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \mathbf{f}(x) dx.$$

b) L'espérance mathématique

$$\mathbb{E}(\mathbf{X}) = m_1(\mathbf{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathbf{f}(x) dx.$$

Remarque :

1. Une variable aléatoire continue peut ne pas avoir d'espérance mathématique (l'intégrale n'est pas convergente !)
2. Si $\mathbf{f}$ est paire (c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, \mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(-x)$) et si $\mathbf{E}(\mathbf{X})$ existe, alors $\mathbf{E}(\mathbf{X}) = 0$.

c) Les moments centrés d'ordre k ($k \in \mathbb{N}$)

$$\mu_k(\mathbf{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(\mathbf{X}))^k \mathbf{f}(x) dx.$$

d) La variance

$$\text{Var}(\mathbf{X}) = \mu_2(\mathbf{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(\mathbf{X}))^2 \mathbf{f}(x) dx.$$

3.3.3 Fonction d'une variable aléatoire continue

Théorème 3.3.1

Soit $\mathbf{X}$ une variable aléatoire continue définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $\mathbf{f}$ sa densité de probabilité. Soit ψ une fonction numérique telle que :

1. ψ est définie et continûment dérivable sur un intervalle ouvert $\mathbf{I}$ contenant $\mathbf{X}(\Omega)$.
2. $\forall x \in \mathbf{I}, \psi'(x) \neq 0$, (ψ est alors une bijection de $\mathbf{I}$ sur $\psi(\mathbf{I})$).

Avec ces considérations, la variable $\mathbf{Y} = \psi(\mathbf{X})$ est une variable aléatoire continue ayant pour densité de probabilité la fonction g définie par :

- i) Si $\mathbf{y} \notin \psi(\mathbf{X}(\Omega))$, $g(\mathbf{y}) = 0$.
- ii) Si $\mathbf{y} \in \psi(\mathbf{X}(\Omega))$, $g(\mathbf{y}) = \frac{f^{-1}(\psi(\mathbf{y}))}{|\psi'^{-1}(\psi(\mathbf{y}))|}$.

3.3.4 Quelques inégalités usuelles

Soit $\mathbf{X}$ une variable aléatoire réelle. Nous avons les inégalités suivantes.

a) Inégalité de Markov

Si $|\mathbf{X}| \in L^p$ alors $\forall \epsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}[|\mathbf{X}| \geq \epsilon] \leq \frac{1}{\epsilon} E(|\mathbf{X}|^p).$$

b) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si $\text{Var}(\mathbf{X}) < +\infty$ alors $\forall \epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}[|\mathbf{X} - E(\mathbf{X})| \geq \epsilon] \leq \frac{1}{\epsilon^2} \text{Var}(\mathbf{X}).$$

c) Inégalité de Jensen

Si $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, $\mathbf{X}$ et $\phi(\mathbf{X})$ intégrables d'espérances finies, alors on a

$$\phi(E(\mathbf{X})) \leq E(\phi(\mathbf{X})).$$

d) Inégalité de Hölder

Si p et q sont des nombres réels tels que $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $|\mathbf{X}|^p$ et $|\mathbf{Y}|^q$ sont intégrables, alors

$$E(|\mathbf{XY}|) \leq (E(|\mathbf{X}|^p))^{\frac{1}{p}} (E(|\mathbf{Y}|^q))^{\frac{1}{q}}.$$

e) Inégalité de Schwarz

En prenant $p = q = 2$ dans l'inégalité précédente on a l'inégalité de Schwarz :

$$E(|\mathbf{XY}|) \leq (E(|\mathbf{X}|^2))^{\frac{1}{2}} (E(|\mathbf{Y}|^2))^{\frac{1}{2}}$$

ou encore

$$E(|\mathbf{XY}|) \leq \sqrt{E(|\mathbf{X}|^2) E(|\mathbf{Y}|^2)}.$$

3.3.5 Loi normale

La loi normale, ou loi normale centrée réduite est la loi la plus connue des probabilités, parfois sous le vocable loi de Laplace-Gauss et caractérisée par une célèbre "courbe en cloche".

a) Loi normale centrée réduite $N(0, 1)$ **Définition 3.3.1**

La loi normale centrée réduite est la loi continue, d'une variable aléatoire $\mathbf{X}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tout entier, définie à partir de la densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Il n'existe par contre pas d'expression simple de sa fonction de répartition autre que la formule intégrale

$$\forall a \in \mathbb{R}, F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx.$$

Dans la pratique, les probabilités d'événements de variables aléatoires suivant une loi normale sont répertoriées dans des tables facilement manipulables. Un calcul intégral plus élaboré donne comme espérance mathématique et variance $\mathbb{E}(\mathbf{X}) = 0$ et $\text{Var}(\mathbf{X}) = 1$ respectivement.

b) Loi normale générale $N(\mu, \sigma^2)$ **Définition 3.3.2**

Il s'agit d'une modification "spatiale" de la Loi normale : la forme en cloche de la densité est la propriété principale de la famille des lois normales, qui peuvent éventuellement être translatées pour devenir asymétriques d'espérance non nulle μ , ou dilatées ou contractées autour de la moyenne en jouant sur la variance σ^2 . La densité est modifiée en

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

L'usage d'un changement de variable $t = \frac{x - \mu}{\sigma}$ permet de se ramener à un calcul d'intégrale à partir de la loi $N(0, 1)$, ce qui nous permettra de consulter les tables existant pour la loi standard précédente. On a le théorème suivant.

Théorème 3.3.2

Si $\mathbf{X}$ est une variable aléatoire de loi normale $N(\mu, \sigma^2)$, alors la variable aléatoire $\mathbf{Z}$ définie par $\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{X} - \mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite $N(0, 1)$.

On montre aussi que $\mathbb{E}(\mathbf{X}) = \mu$ et $\text{Var}(\mathbf{X}) = \sigma^2$.

c) Manipulation de la Loi normale

Notons par Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $N(0, 1)$. On utilise les valeurs de $\Phi(a)$ tabulées et le changement de variable pour calculer les valeurs de la fonction de répartition F d'une loi normale générale. Par exemple pour

une variable aléatoire X de loi $N(6, 4)$ on a :

$$\begin{aligned}
 F_X(7) &= p(X \leq 7) \\
 &= p\left(\frac{X - 6}{2} \leq \frac{7 - 6}{2}\right) \\
 &= p\left(\frac{X - 6}{2} \leq \frac{1}{2}\right) \\
 &= p\left(Z \leq \frac{1}{2}\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= 0.6915.
 \end{aligned}$$

Les valeurs ne sont tabulées que pour des valeurs de a positives, mais on s'en sort à l'aide de la propriété suivante de la fonction de répartition Φ de la loi normale.

Propriété 3.3.1

Soit Z une variable aléatoire de loi $N(0, 1)$. Alors on a

$$\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$$

et en particulier

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

On a par ailleurs

$$p(|Z| \leq a) = 2\Phi(a) - 1.$$

Exercice 3.4

Calculer $p(X > 1)$ et $p(4 \leq X \leq 8)$ pour $X \rightsquigarrow N(6, 4)$.

Remarque 3.3.1

En utilisant les techniques précédentes, on constate tout d'abord que la loi normale $N(\mu, \sigma^2)$ est une loi symétrique autour de l'axe médian $x = \mu$. On a ainsi 50% des individus au dessus de la moyenne et 50% en dessous. C'est loin d'être le cas en général bien que notre intuition nous pousse souvent à le croire, participant à une intuition probabiliste erronée.

d) Sommes de variables aléatoires normales indépendantes

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires normales indépendantes de lois $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Alors $X_1 + X_2$ suit une loi normale $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ et $X_1 - X_2$ suit une loi normale $N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

3.3.6 Autres exemples de lois continues usuelles

a) Loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

Nous commençons par le cas $a = 0$ et $b = 1$. Une variable aléatoire X suit une loi $\mathcal{U}[0, 1]$ si X a pour densité

$$f_X(x) = 1_{[0,1]}(x),$$

où $\mathbf{1}_A$ désigne la fonction indicatrice sur A , définie par

$$\mathbf{1}_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie en intégrant que $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$ et $\text{Var}(X) = \frac{1}{12}$.

On dit que $X \rightsquigarrow \mathcal{U}[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, si $\frac{X-a}{b-a} \rightsquigarrow \mathcal{U}[0, 1]$.

On vérifie que $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$ et $\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

b) Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

Une v.a. X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$, si X est continue et a pour densité

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(x).$$

On vérifie que $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

c) Loi gamma de paramètres p et λ positifs

Une v.a. X suit la loi $\gamma(p, \lambda)$ si sa densité est donnée par

$$f_X(x) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(x),$$

où

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

On a en intégrant $\mathbb{E}(X) = \frac{p}{\lambda}$ et $\text{Var}(X) = \frac{p}{\lambda^2}$.

Remarque 3.3.2

- Noter que pour $p = 1$ on a la loi exponentielle de paramètre λ , i.e. $\gamma(1, \lambda) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{E}(\lambda)$.
- Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$, alors $X_1 + X_2 + \dots + X_n \rightsquigarrow \gamma(n, \lambda)$.

d) Loi de Chi-deux ou Chi-carré à n degrés de liberté (d.d.l)

Une v.a. X suit la loi χ_n^2 si sa densité est de la forme

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(x).$$

On remarque que $\chi_n^2 \stackrel{\mathcal{L}}{=} \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$, si bien que $\mathbb{E}(X) = n$ et $\text{Var}(X) = 2n$. De plus, si $X \rightsquigarrow \chi_n^2, Y \rightsquigarrow \chi_m^2$ avec X et Y indépendantes, alors $X + Y \rightsquigarrow \chi_{n+m}^2$.

e) Loi de Cauchy de paramètre $\theta \geq 0$

Une v.a. X suit une loi de Cauchy de paramètre $\theta \geq 0$, i.e. $X \rightsquigarrow \text{Cauchy}(\theta)$, si sa densité est de la forme

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi (1 + (x - \theta)^2)}.$$

Cette loi a une espérance infinie, i.e. $\mathbb{E}(X) = +\infty$. On prend souvent $\theta = 0$ et donc

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi (1 + x^2)}.$$

f) Loi de Student à n d.d.l

La loi de Student à n d.d.l est la loi suivie par la variable aléatoire

$$T_n = \frac{X}{\sqrt{Y/n}},$$

où $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y \rightsquigarrow \chi_n^2$ avec X et Y indépendantes.
 T_n a pour densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{n}\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

avec

$$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \quad \left(= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \text{ pour } p, q \in \mathbb{N}^* \right).$$

On prouve que la loi de Student est centrée comme la loi normale. On a $\mathbf{E}(T_n) = 0$ et $\text{Var}(T_n) = \frac{n}{n-2}$ pour $n > 2$.

g) Loi de Fisher-Snedecor à n et m d.d.l

La loi de Fisher-Snedecor à n et m d.d.l est la loi suivie par la v.a.

$$F_{n,m} = \frac{X/n}{Y/m},$$

où $X \rightsquigarrow \chi_n^2$ et $Y \rightsquigarrow \chi_m^2$ avec X et Y indépendantes. Si $U \rightsquigarrow F_{n,m}$ alors $\frac{1}{U} \rightsquigarrow F_{m,n}$.

3.4 Convergence des suites de variables aléatoires

Il existe quatre types de convergence des suites de variables aléatoires.

3.4.1 Convergence en loi

Définition 3.4.1

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire. On dit que (X_n) tend vers X en loi et on note

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$$

si pour toute fonction continue et bornée f sur $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{E}(f(X_n)) \rightarrow \mathbb{E}(f(X))$ ou encore si $F_n(x) = p(X_n \leq x) \rightarrow F(x) = p(X \leq x) \quad \forall x \mid p(X = x) = 0$ (i.e. x point de continuité de F).

Théorème 3.4.1

Théorème central limite (TCL)

Si (X_n) est une suite de v.a.r. iid avec $\mu = \mathbb{E}(X_1)$, $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$ et $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ alors

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

En particulier, si $X \sim B(n, p)$ alors $\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$

3.4.2 Convergence en probabilité

Définition 3.4.2

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. On dit que (X_n) tend vers X en probabilité (on note $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$) si $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$.

3.4.3 Convergence presque sûre

Définition 3.4.3

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. On dit que (X_n) tend vers X presque sûrement (on note $X_n \xrightarrow{p.s.} X$) si $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(\limsup |X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$.

3.4.4 Convergence en moyenne d'ordre r

Définition 3.4.4

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. On dit que (X_n) tend vers X en moyenne d'ordre r ($r \geq 1$) (on note $X_n \xrightarrow{L^r} X$) si X et X_n sont de puissance r -intégrables et on a $\mathbb{E}(|X_n - X|^r) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Théorème 3.4.2 (Lois des grands nombres)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires iid telle que $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$. Alors en posant $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ on a :

1. Loi faible des grands nombres (LfGN) : $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
2. Loi forte des grands nombres (LFGN) : $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}(X_1)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

3.5 Quelques approximations usuelles et leur validité

3.5.1 Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale

On a $\mathcal{H}(N, n, p) \simeq \mathcal{B}(n, p)$. Si n et p sont fixés, alors $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{C_{Np}^k C_{N-Np}^{n-k}}{C_N^n} &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}[\mathcal{H}(N, n, p) = k] \\ &= C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \mathbb{P}[\mathcal{B}(n, p) = k]. \end{aligned}$$

Validité

En pratique on a $\mathcal{H}(N, n, p) \simeq \mathcal{B}(n, p)$ si $N \geq 10n$, i.e. si le taux de sondage $\frac{n}{N} \leq 0.1$.

3.5.2 Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

On a $\mathcal{B}(n, p) \simeq \mathcal{P}(\lambda)$. Si $p = p(n) \in [0, 1]$ tel que $np \rightarrow \lambda$, $n \rightarrow \infty$, alors pour tout k fixé dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} P[\mathcal{B}(n, p) = k] \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \mathbb{P}[\mathcal{P}(\lambda) = k]. \end{aligned}$$

Validité

En pratique on a $\mathcal{B}(n, p) \simeq \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = np$ si

$$\begin{cases} p \leq 0.1 \\ n \geq 30 \\ np < 15. \end{cases}$$

3.5.3 Approximation de la loi binomiale par la loi normale

On a $\mathcal{B}(n, p) \simeq \mathcal{N}(np, np(1-p))$.

Validité

En pratique on admet que $\mathcal{B}(n, p) \simeq \mathcal{N}(np, np(1-p))$ si

$$\begin{cases} n \geq 30 \\ np \geq 15 \\ np(1-p) > 5. \end{cases}$$

Correction de continuité

Si F est la fonction de répartition de $\mathcal{N}(np, np(1-p))$, alors l'intervalle $[k - 0.5, k + 0.5[$ étant l'ensemble des réels s'arrondissant à l'entier k , on remplace $P[X = k]$ par

$$\mathbb{P}[k - 0.5 \leq X < k + 0.5] = F(k + 0.5) - F(k - 0.5) \text{ pour } k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$$

et $\mathbb{P}[X = 0]$ est remplacé par $\mathbb{P}[X < 0.5] = F(0.5)$; $\mathbb{P}[X = n]$ est remplacé par $\mathbb{P}[X > n - 0.5] = 1 - F(n - 0.5)$.

3.5.4 Approximation de la loi de Poisson par la loi normale

On a $\mathcal{P}(\lambda) \simeq \mathcal{N}(\lambda, \lambda)$.

Validité

En pratique on admet que $\mathcal{P}(\lambda) \simeq \mathcal{N}(\lambda, \lambda)$ si $\lambda \geq 15$. On effectue la correction de continuité comme décrite au paragraphe précédent.

3.5.5 Utilisation du théorème central limite

D'après le théorème 3.4.1, pour n assez grand, la loi de $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}$ peut être approchée par la loi normale centrée et réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Validité

En pratique $n \geq 30$ est considéré comme assez grand.

3.6 Exercices

Exercice 3.5

On lance un dé tétraédrique dont les faces sont numérotées de 1 à 4 et un dé octaédrique dont les faces sont numérotées de 1 à 8. Calculer la loi de la somme S , du produit P et du plus grand M des deux nombres obtenus.

Exercice 3.6

Soit X une v.a.r prenant les valeurs $-4, -2, 0, 2$ et 4 avec les mêmes probabilités. Trouver la loi de $|X|$ et de X^2 ainsi que leurs valeurs caractéristiques (espérance mathématique, variance et écart-type).

Exercice 3.7

Un sac contient 7 jetons (indiscernables au touché). L'un porte le chiffre 0; deux portent le chiffre 1; deux portent le chiffre 2; deux portent le chiffre 3. On extrait au hasard du sac deux jetons. On considère la variable aléatoire X égale à la somme des nombres figurés sur les deux jetons extraits. Déterminer la loi de probabilité de X . Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X .

Exercice 3.8

On utilise un jeu ordinaire de 32 cartes. On convient d'attribuer la valeur 11 aux as, la valeur 10 aux figures et aux dix, la valeur 9 aux neuf, la valeur 8 aux huit, la valeur 7 aux sept. On extrait au hasard deux cartes et l'on considère la loi de probabilité où la variable aléatoire X est la somme des valeurs des deux cartes extraites.

1. Écrire sous forme de tableau, la liste des valeurs possibles de $\mathbf{X}$ et les probabilités correspondantes.
2. Donner la fonction de répartition de cette loi de probabilité et faire sa représentation graphique.
3. Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de $\mathbf{X}$.

Exercice 3.9

Soit $\mathbf{X}$ une v.a.r suivant la loi $\mathcal{N}(3, 2)$.

1. Calculer les probabilités suivantes : $P(\mathbf{X} < 2.5)$, $P(\mathbf{X} > 3.5)$ et $P(1.5 < \mathbf{X} < 2)$.
2. Déterminer x tel que $P(\mathbf{X} < x) = 0.95$ (x est appelé le quantile d'ordre 0.95 de la loi de $\mathbf{X}$).

Exercice 3.10

Soit $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ un couple de v.a.r. dont la loi est définie par la tableau suivant :

$\mathbf{X} \backslash \mathbf{Y}$	-1	0	1	Total
0	a	b	$1/4$	$5/8$
1	$1/8$	0	c	$3/8$
Total	$3/8$	$1/8$	d	1

1. Trouver a , b , c et d .
2. Déterminer les lois des v.a. $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ et $\mathbf{XY}$.
3. Les v.a. $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 3.11

Soit $\mathbf{X}$ une variable aléatoire réelle continue dont la densité est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où k est une constante réelle.

1. Déterminer k pour que f soit une densité de probabilité.
2. Calculer l'espérance mathématique et la variance de $\mathbf{X}$.
3. Déterminer la fonction de répartition $F(x)$ de $\mathbf{X}$.
4. En utilisant F , calculer : $P\left(\mathbf{X} \leq \frac{1}{2}\right)$, $P\left(\frac{1}{2} \leq \mathbf{X} \leq 3\right)$ et $P\left(\mathbf{X} < \frac{1}{2} \mid \mathbf{X} > \frac{1}{4}\right)$.

Exercice 3.12

Soit $\mathbf{X}$ une v.a. suivant la loi binomiale de paramètres $n > 0$ et $p \in]0, 1[$. Calculer

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\mathbf{X} + 1}\right)$$

Exercice 3.13

On considère deux types d'avions $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une même probabilité p ($0 < p < 1$) de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne (c'est-à-dire que $\mathbf{A}$ arrive à destination si au plus un des moteurs tombe en panne et $\mathbf{B}$ arrive à destination si aucun des moteurs ne tombe en panne). Soient $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ respectivement le nombre de moteurs tombant en panne pour $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$.

- 1) Quelles sont les lois respectives de $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$?
- 2) Déterminer en fonction de $\mathbf{p}$ les probabilités $\mathbf{p_A}$ (resp. $\mathbf{p_B}$) pour que l'avion $\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{B}$) arrive à destination.
- 3) Quel avion choisirez-vous ? (on discutera en fonction de la valeur de $\mathbf{p}$).

Exercice 3.14

Chaque année, Monsieur Zzzz effectue **2** fois par jour, **5** jours par semaine et pendant **46** semaines, un trajet en voiture dont la durée est une v.a.r $\mathbf{X}$ qui suit une loi d'espérance **45** minutes et d'écart-type **10** minutes. On suppose que les durées des trajets sont mutuellement indépendantes. Quelle est la probabilité pour que M. Zzzz passe au moins **350** heures dans sa voiture au cours de l'année ?

Exercice 3.15

Soit $\mathbf{a}$ un nombre réel $\mathbf{X}$ une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que,

$$\forall \mathbf{k} \in \mathbb{N}, P(\mathbf{X} = \mathbf{k}) = \frac{e^{\mathbf{a}}}{2^{\mathbf{k}} \mathbf{k}!}.$$

Déterminer $\mathbf{a}$.

Exercice 3.16

On jette un dé trois fois consécutives.

1. Quelle est la probabilité pour que le premier point soit inférieur à la somme des deux autres ?
2. Quelle est la probabilité pour que cet événement se produise **3** fois sur **6** ?

Exercice 3.17

Dans une urne, on dispose $\mathbf{B}$ boules blanches et $\mathbf{N}$ boules noires. On tire d'un coup $\mathbf{n}$ boules de cette urne. On suppose $\mathbf{n} \leq \mathbf{B}$ et $\mathbf{n} \leq \mathbf{N}$. Soit $\mathbf{X}$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées. Déterminer la loi de $\mathbf{X}$ et trouver son espérance mathématique.

Exercice 3.18

Une usine fabrique des billes de diamètre **8 mm**. Les erreurs d'usinage provoquent des variations de diamètre. On estime, sur les données antérieures, que l'erreur est une variable aléatoire qui obéit à une loi normale, les paramètres étant : moyenne : **0 mm**, écart-type : **0.02 mm**. On rejette les pièces dont le diamètre n'est pas compris entre **7.97 mm** et **8.03 mm**. Quelle est la proportion de billes rejetées ?

Tables statistiques

Table des valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

$$\Phi(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt.$$

x	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5150	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,10	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5754
0,20	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,30	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,40	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,50	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,60	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,70	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,80	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
0,90	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,00	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,10	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,20	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,30	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,40	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,50	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9430	0,9441
1,60	0,9452	0,9463	0,9474	0,9485	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,70	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,80	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9700	0,9706
1,90	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9762	0,9767
2,00	0,9773	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,10	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,20	0,9861	0,9865	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,30	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,40	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,50	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,60	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,70	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,80	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9980	0,9981
2,90	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Grandes valeurs de x

x	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8
$\Phi(x)$	0,99865	0,99903	0,99931	0,99952	0,99966	0,99977	0,99984	0,99989	0,99993

Quantiles usuels de la loi normale centrée réduite.

Pour tout $p \in]0, 1[$, le quantile d'ordre p de la loi normale centrée réduite est $\Phi^{-1}(p) = z$ tel que $\mathbb{P}(X \leq z) = p$.

p	0,5	0,75	0,8	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
$\Phi^{-1}(p)$	0	0,67	0,84	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58